Titolo del progetto: Gruppi risolubili di cardinalità elevata

Responsabile scientifico: Carmela Musella (PA)

Membri del progetto: Francesco de Giovanni (PO), Ulderico Dardano (RTI), Maria De Falco (RTI), Mattia Brescia (dottorando) , Anna Valentina De Luca (dottoranda), Maria Ferrara (dottoranda), Giovanna di Grazia (dottoranda), Roberto Ialenti (dottorando), Fulvio Maddaloni (dottorando), Marco Trombetti (dottorando).

Settore ERC: PE1_2 Algebra

Descrizione del progetto:
Stato dell'arte: La teoria dei gruppi può essere applicata in diversi settori della matematica, della fisica, della chimica e di altre scienze, per descrivere fenomeni che presentino caratteri di simmetria; anche per questo è importante avere sempre nuove informazioni sui gruppi finiti e su quelli infiniti.
Una proprietà gruppale si dice una condizione finitaria se è verificata da ogni gruppo finito. Esempi di condizioni finitarie sono le classiche condizioni di catena sui sistemi di sottogruppi. A partire dal secolo scorso una parte rilevante della ricerca in teoria dei gruppi si è basata sul fatto che l'imposizione di condizioni finitarie ad un gruppo infinito forzi il gruppo ad essere "vicino" ai gruppi finiti. Questa teoria è stata sviluppata da molti autorevoli matematici, quali R. Baer, S.N. Chernikov, K.A. Hirsch, A.G. Kuros, O.J. Schmidt, H. Wielandt.
Recentemente, è stato adottato dai ricercatori coinvolti nel progetto un nuovo punto di vista, studiando gruppi lontani dalla finitezza. Si è fissata infatti l'attenzione sui gruppi "grandi", nel senso che sarà chiarito nel seguito.
In letteratura ci sono stati differenti approcci ai gruppi grandi; il primo classico approccio consisteva nel costruire gruppi nei quali fosse possibile immergere gruppi assegnati.
Si ricordi che una proprietà gruppale P è detta di immersione se in un gruppo G le immagini di P-sottogruppi mediante automorfismi di G hanno ancora la proprietà P.
Se P è una proprietà di immersione, si dice che X è una classe di gruppi che controlla P se verifica la seguente condizione
Se G è un gruppo contenente X-sottogruppi, e tutti gli X-sottogruppi di G verificano P, allora tutti i sottogruppi verificano P.
In un gruppo G, se ogni sottogruppo finitamente generato è normale, allora ogni sottogruppo è normale, sicché la classe dei gruppi finitamente generati controlla la normalità; è però facile vedere che tale classe non controlla molte significative proprietà di immersione. Ciò dipende dal fatto che i gruppi finitamente generati sono troppo "piccoli".
Si pone dunque il problema di stabilire quanto grandi debbano essere gli X-gruppi perché la classe X controlli le più importanti proprietà di immersione.
Sia X una classe di gruppi. Si dirà che X è una classe di gruppi grandi se sono verificate le seguenti condizioni:
• Se un gruppo G contiene X-sottogruppi, allora G appartiene a X;
• Se N è un sottogruppo normale di un X-gruppo G, almeno uno dei gruppi N e G/N appartiene a X;
• X non contiene gruppi ciclici finiti.
Siano X una classe di gruppi grandi e P una proprietà di immersione. Poiché ogni gruppo contenente un X-sottogruppo appartiene a X, si ha che X controlla P se e solo se vale la seguente condizione:
Se in un X-gruppo G tutti gli X-sottogruppi hanno la proprietà P, allora tutti i sottogruppi hanno la proprietà P.
Il più semplice esempio di classe di gruppi grandi è la classe dei gruppi infiniti.
Poiché esistono gruppi contenenti sottogruppi non normali, in cui tutti i sottogruppi infiniti sono normali, si ha che la classe dei gruppi infiniti non controlla la normalità.
Un gruppo G si dice di rango finito se esiste un numero positivo r tale che ogni sottogruppo finitamente generato di G possa essere generato da al più r elementi e G si dice di rango infinito se tale intero r non esiste. Ovviamente i gruppi di rango infinito costituiscono una classe di gruppi grandi.

Negli ultimi anni i ricercatori coinvolti hanno intensivamente testato la classe dei gruppi di rango infinito rispetto al controllo delle principali proprietà di immersione.
In una serie di articoli dei membri del progetto è stato provato che in un gruppo risolubile generalizzato, il comportamento dei sottogruppi di rango finito rispetto a molte proprietà di immersione può essere trascurato, poiché molte proprietà si possono dedurre dal comportamento dei sottogruppi di rango infinito.
I risultati ottenuti incoraggiano a studiare nuove classi di gruppi grandi.
Obiettivi: L'idea è quella di considerare gruppi di elevata cardinalità; l'obiettivo è provare che la classe dei gruppi non contabili controlla la normalità e altre proprietà di immersione ad essa connesse, quali la subnormalità, la nearly normalità, la almost normalità, la quasinormalità.
Risultati attesi: Se P è una proprietà gruppale connessa con la normalità, si vuole provare che se i sottogruppi non contabili di un gruppo verificano P, allora tutti i sottogruppi hanno la proprietà P.
Metodologie: Le ricerche saranno condotte oltre che con metodi e strumenti tipici della teoria dei gruppi risolubili infiniti, anche prevedibilmente con argomenti e risultati propri della teoria degli insiemi.