

PROGETTO DIPARTIMENTALE 2015

Titolo del Progetto: PROBLEMI EVOLUTIVI E APPLICAZIONI

Responsabile Scientifico: PROF. CARLO MANTEGAZZA

Partecipanti: DOTT. MARCO BARCHIESI, PROF. NICOLA FUSCO, DOTT.SSA TERESA ISERNIA, DOTT.SSA CHIARA LEONE, PROF.SSA BIANCA STROFFOLINI, PROF.SSA ANNA VERDE

Settore ERC: PE1_8 – ANALISI

Il progetto sarà principalmente concentrato su problemi legati all'evoluzione di modelli multifase con particolare attenzione al comportamento delle interfacce nel tempo.

Una prima linea di ricerca è lo studio della formazione delle singolarità in sistemi bi-dimensionali in cui l'energia è data semplicemente dalla lunghezza totale delle curve di interfaccia tra le varie fasi, questo porta a considerare il moto per curvatura media di reti di curve con giunzioni multiple. Vari risultati di regolarità sono stati ottenuti negli scorsi anni nei lavori di Magni–Mantegazza–Novaga–Tortorelli e Ilmanen–Neves–Schulze, ma rimangono aperte molte questioni di carattere globale.

Un altro problema riguarda l'analisi del flusso associato ai cosiddetti H -sistemi, in dimensione $n \geq 2$, dato dal sistema di equazioni alle derivate parziali

$$u_t = \Delta_n u + H(u) D_1 u \wedge \cdots \wedge D_n u,$$

dove $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e $H : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata, che può anch'esso essere interpretato come un'evoluzione di un'interfaccia per la stretta connessione col moto per curvatura media di una ipersuperficie. Non sembrano essere presenti in letteratura dei risultati di regolarità in dimensione $n > 2$, caso che ci proponiamo di investigare.

Più in generale, vorremmo considerare il problema della regolarità per i sistemi parabolici del tipo

$$u_t = \operatorname{div}(g(|Du|)Du),$$

dove $g(|Du|) \sim |Du|^{p-2}$ oppure $g(|Du|) \sim \frac{\phi'(|Du|)}{|Du|}$ con ϕ' derivata di una funzione convessa. Di Benedetto–Friedman hanno dimostrato in una serie di lavori la regolarità $C^{1,\alpha}$ per il gradiente della soluzione, quando $g(|Du|) = |Du|^{p-2}$ (con $p > 1$), cioè per l'operatore p -laplaciano. Intendiamo estendere tali risultati al caso generale.

Inoltre, l'analisi del limite per $p \rightarrow 1$ dell'operatore p -laplaciano conduce a problemi di *total variation flow* per gli insiemi di livello,

$$u_t = \operatorname{div}(Du/|Du|).$$

Questo modello appare quando si usa lo "steepest descent method" per minimizzare la variazione totale nel contesto della ricostruzione di immagini.

Un argomento connesso ma più applicativo è l'evoluzione per diffusione superficiale di film sottili con il metodo dei movimenti minimizzanti. L'energia considerata è data dalla somma della misura della superficie che rappresenta il profilo del film e di un termine di volume che nel modello rappresenta l'energia elastica necessaria a deformare il film. Tale evoluzione, che è il *gradient-flow* dell'energia rispetto alla norma H^{-1} è già stata studiata in alcuni lavori recenti di Fonseca–Fusco–Leoni–Morini aggiungendo all'energia un termine regolarizzante del tipo ϵ per l'integrale del modulo della curvatura media elevato ad una opportuna potenza, dipendente dalla dimensione. Si vorrebbe pertanto dimostrare che le evoluzioni così ottenute convergono al tendere di ϵ a zero. Una simile problematica verrà anche affrontata per studiare l'evoluzione delle configurazioni di equilibrio del modello di Ohta–Kawasaki. Anche in questo caso l'energia è data dalla somma del perimetro della configurazione di equilibrio E e di un termine di volume dato dall'integrale del gradiente al quadrato della soluzione dell'equazione di Poisson in cui al termine noto compare

la differenza fra la funzione caratteristica di E e del suo complementare. In questo caso l'evoluzione è il gradient-flow dell'energia rispetto alla norma $H^{-1/2}$.

Sempre di taglio applicativo è la linea di ricerca recentemente aperta da Barchiesi-Zepieri-Lazzaroni che hanno analizzato un modello di materiale fragile fortemente disomogeneo, mostrando come l'interazione a livello microscopico di due materiali aventi stessa resistenza alla frattura ma differente modulo elastico, generi a livello macroscopico un comportamento di tipo "coesivo", nel senso che l'energia necessaria per aprire una frattura dipende anche dall'ampiezza della frattura stessa, nonostante questa dipendenza non sia presente nei singoli materiali (che sono, per l'appunto, fragili). Inoltre, si ipotizza che nel modello dinamico sia rilevabile un aumento della resistenza alla frattura. Il prossimo passo sarà quindi l'analisi del comportamento di questi modelli evolutivi.