



Coltiviamo il futuro – Programma STAR 2013

Aspetti geometrici di teorie quantistiche di campo

Dalle algebre di Hopf alla geometria differenziale noncommutativa

Francesco D'Andrea

Dipartimento di Matematica e Applicazioni *R. Caccioppoli*

21/05/2014

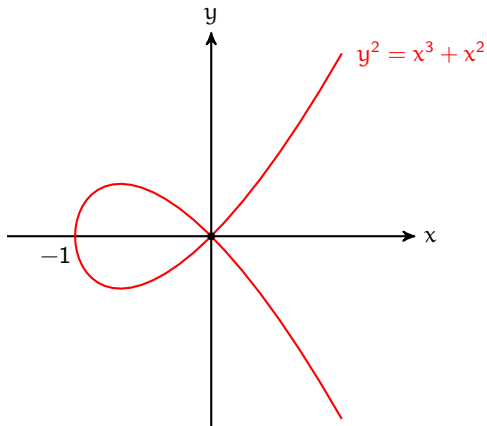


Metodi algebrici in geometria

GEOMETRIA



ALGEBRA



Curva con singolarità in 0
(in 0 non esiste una sola retta tangente, ma due)

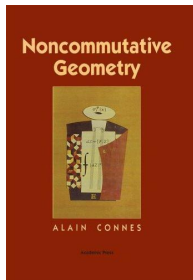
- Singolarità \Rightarrow utilizzare metodi algebrici.

Geometria noncommutativa

L'idea alla base della geometria noncommutativa è simile: studiare un tipo differente di “singolarità”, il tipo che si incontra in **meccanica quantistica**, utilizzando idee di **geometria differenziale** applicate alle **algebre di operatori**.



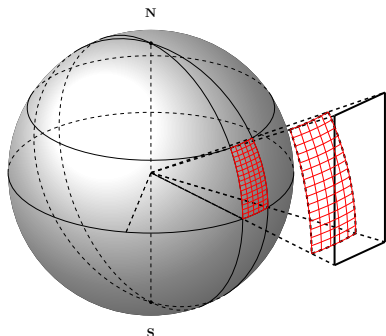
Alain Connes (Medaglia Fields 1982)



Dal libro rosso di Connes [trad.]:

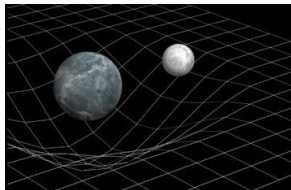
La corrispondenza fra spazi geometrici e algebre commutative è una idea basilare della geometria algebrica. Lo scopo di questo libro è di estendere tale corrispondenza alle algebre non-commutative nell'ambito dell'analisi reale.

Cosa è la geometria differenziale?



- La geometria differenziale studia insiemi (curve, superfici, ...) che possono essere “ricoperti” con delle **carte**.
- Mappare i punti su delle carte permette (localmente) di individuarne la posizione usando delle **coordinate cartesiane**.

- La geometria differenziale è alla base della teoria della relatività.
- Esistono molti casi interessanti in cui una descrizione “cartografia” di questo tipo non è possibile (e.g. la curva con nodo nella 1a slide).

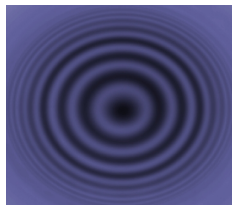


Cosa è la meccanica quantistica?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{impulso (massa} \times \text{ velocità)}}}{\mathbf{p}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{posizione}}}{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = i \hbar$$

costante di Planck

- ▶ Non è possibile misurare posizione e velocità con precisione arbitraria (principio di indeterminazione di Heisenberg).
- ▶ Si perde la nozione di “punto”.
- ▶ Alcune grandezze fisiche assumono solo valori discreti (ipotesi quantistica di Planck).



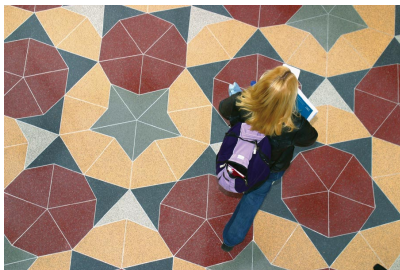
Serie di Balmer (righe visibili dello spettro di emissione dell'idrogeno)

Relatività + fisica quantistica = quantum gravity?

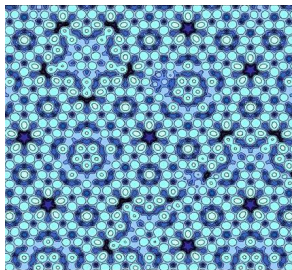
L'idea iniziale della geometria n.c. era di trovare un linguaggio comune per meccanica quantistica (**algebre di operatori**) e relatività generale (**geometria differenziale**).

Le applicazioni in matematica e fisica sono in realtà numerose:

- costruzione di invarianti secondari per foliazioni
- teoria dei numeri
- trasporto ottimale
- dimostrazione rigorosa della quantizzazione della conduttanza nell'IQHE (J. Bellissard et al.)
- reticoli aperiodici (e.g. classificazione tassellature di Penrose) \Rightarrow quasi-cristalli



Tassellatura di Penrose



Quasi-cristallo Ag-Al

(D. Shechtman, Nobel per la chimica 2011)

Dettagli progetto

Durata: 2 anni (gen 2014 – gen 2016)

Finanziamento: 84.500 euro

Dipartimento di Matematica, UniNA:

P.I. (“Principal Investigator”)

Prof. **Davide Franco** (geometria algebrica)

Prof. **Gaetano Fiore** (fisica matematica)

Prof. **Luciano Amito Lomonaco** (topologia algebrica)

Dott. **Maurizio Brunetti** (topologia algebrica)

futuro **assegnista di ricerca n° 1**

futuro **assegnista di ricerca n° 2**

Dipartimento di Fisica, UniNA:

Prof. **Fedele Lizzi** (fisica teorica)

Dott. **Patrizia Vitale** (fisica teorica)

Dott. **Agostino Devastato** (dottorando in fisica)