PROGRAMMA DI RICERCA

G. ILARDI

Stato dell'arte e risultati della ricerca

A). Nell'ambito dello studio delle varietà proiettive immerse, particolare interesse hanno avuto - sia in ambito classico che contemporaneo - le varietà con "pochi" punti doppi apparenti, e le loro generalizzazioni. Ad esempio, In [CR], Ciliberto e Russo definiscono e classificano le OA_{k-1}^{k+1}-varietà, cioè le varietà X dello spazio proiettivo N-dimensionale tali che la loro varietà dei k-spazi $(k+1)$-secanti riempie lo spazio ambiente (e quindi $N = (k+1)n + k$) e tali che c'è un solo k-spazio $(k+1)$-secante passante per il punto generale dello spazio ambiente. Con P. De Poi (Univ. Udine), e A. Verra (Univ. Roma 3): dopo avere esteso la definizione della varietà delle multisecanti di varietà proiettive alle varietà degli $(r-1)$-piani $(k+1)$-secanti, ci si propone di studiare le naturali estensioni delle varietà studiate in [CR], le varietà con punto doppio apparente generalizzato, ovvero varietà n-dimensionali di $\mathbb{P}^N$ tali che la loro varietà degli $(r-1)$-spazi $(k+1)$-secanti riempie lo spazio ambiente (e quindi $n(k+1)-(N-r)(k-r)+r = N$) e tali che c'è un solo $(r-1)$-spazio $(k+1)$-secante passante per il punto generale dello spazio ambiente. Si ritiene di classificare - tra tali varietà - almeno le superficie in dimensione bassa, a partire da quelle con $r = 2$ (essendo il caso $r = 1$ quello delle superficie di $\mathbb{P}^5$ con un solo punto doppio apparente, e quindi già noto: [S], [R] e [CR1]), cominciando dalle superficie di $\mathbb{P}^6$ con un solo piano quadrisecante per un punto generale dello spazio ambiente.

B). A partire da risultati classici di A. Terracini sulle varietà con difetto di tangenza ([T1] e [T2]), si sono recentemente caratterizzate le varietà le cui varietà osculatrici di ordine superiore sono difettive in termini di forme fondamentali [DDI]. In particolare, si è applicato il metodo dei riferimenti mobili introdotto da Darboux, Cartan e altri, approfondendo lo studio delle relazioni tra la geometria algebrica delle sottovarietà dello spazio proiettivo e la loro geometria proiettivo-differenziale locale, nel solco dei lavori classici ripresi successivamente da Akivis e Goldberg [AG], Griffiths e Harris [GH] e piú recentemente da Landsberg [L1], [L2]. Ulteriori interessanti sviluppi sono aperti dall'articolo [MMO], in cui in particolare si legano proprietà proiettivo-differenziali a proprietà piú prettamente algebriche, nello specifico, la cosiddetta "Weak Lefschetz Property". E. Togliatti ha posto e risolto il problema di classificare le superfici razionali che soddisfano una sola equazione di Laplace, cioè di classificare le proiezioni della superficie di Veronese duale nello spazio proiettivo di dimensione nove che soddisfano una sola equazione di Laplace. D. Perkinson ha poi classificato le superfici e 3-folds toriche lisce che soddisfano almeno un'equazione di Laplace di ordine r ma nessuna equazione di ordine minore di r. Anch'io mi sono interessata di questo problema studiando i lavori di Togliatti. Ho introdotto il concetto di sistema di Togliatti, in particolare i sistemi monomiali di cubiche per varietà di dimensione tre. Con P. De Poi (Univ. Udine), con R. Di Gennaro (Univ. Napoli "Federico II") , "On varieties with higher osculating defects", pubblicato su Revista matematica iberoamericana, vol. 29 (2013), p. 1191–1210, abbiamo provato che data una varietà di dimensione k , sia V, il suo t-esimo difetto di osculazione è uguale a m e la sua $(t+1)$-esima forma fondamentale ha dimensione almeno $k-m$ se e solo se la matrice jacobiana della $(t+1)$-esima forma fondamentale ha rango $k-m$. Ci siamo riproposti di classificare o almeno descrivere le varietà di dimensione piccola e con t piccolo del precedente risultato.

Con R. Di Gennaro e J. Valles in "Singular hypersurfaces characterizing the Lefschetz properties", pubblicato sul "Journal of the London Mathematical Society", vol. 89, p. 194–212, studiamo il legame tra gli ideali artiniani che falliscono la WLP in grado $d-1$ e le varietà che soddisfano equazioni differenziali di ordine $d-1$. Questo collegamento è stato messo in evidenza da E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e da G. Ottaviani, e da noi approfondito. In particolare estendiamo questo legame alla situazione piú generale degli ideali artiniani che falliscono la Strong Lefschetz property in rango $k>0$ in grado $d-k$. Usando una nuova a caratterizzazione della WLP e della SLP in termini di ipersuperfici singolari si classificano molti esempi torici che falliscono la WLP ed anche la SLP in ogni rango.

C). Lo studio della prima mappa di Gauss è un argomento classico di geometria algebrica, mentre quello delle mappe di Gauss di ordine superiore è ancora scarsamente studiato. La prima differenza basilare è che le fibre della prima mappa di Gauss sono aperti di spazi lineari, mentre per quelle di ordine superiore questo non è vero. Nel nostro articolo lo studio delle mappe di Gauss di ordine superiore è effettuato analizzando i comportamenti infinitesimali delle stesse.

Con P. De Poi "On higher Gauss maps", in corso di stampa su "Journal of pure and applied algebra" abbiamo dimostrato che la fibra generale dell'i-esima mappa di Gauss ha dimensione m se e solo se nel punto generale la $(i+1)$-esima forma fondamentale è fatta da coni di vertice un fissato sottospazio di dimensione $m-1$, estendendo un noto teorema per la prima mappa di Gauss.

Come conseguenza si ottengono facilmente alcuni risultati classici e si studiano le varietà la cui immagine di una mappa di Gauss di ordine superiore ha per immagine una curva, descrivendo completamente le loro varietà degli spazi osculatori di ordine superiore.

D). Isaac Newton [N] descrisse un algoritmo per calcolare termine per termine le serie che nascono come radici in funzione di y di equazioni algebriche $F(x,y)$. Il principale strumento usato nell'algoritmo è un oggetto geometrico detto il poligono di Newton. Le radici trovate appartengono a un campo di serie di potenze dette serie di Puiseux. L'estensione dell'algoritmo di Newton-Puiseux è dovuto a J. Mcdonald [MC1, MC2].

Con F. Aroca e L. Lopez De Medrano, in "Puiseux power series solutions for systems of equations", International Journal of Mathematics, vol. 21, p. 1439–1459, si dà un metodo efficace per calcolare le serie di Puiseux in punti singolari di varietà algebriche. Il metodo è un'estensione di quello per curve algebriche piane e sostituisce il poligono di Newton con la tropicalizzazione dell'ideale generato dal sistema di equazioni.

Parole chiave

A) Varietà con un punto doppio apparente, varietà degli spazi multisecanti, superficie.

B) Forme fondamentali, equazioni di Laplace, difetto di osculazione, riferimenti mobili.

C) Mappe di Gauss di ordine superiore, forme fondamentali di ordine superiore

D) Serie di Puiseux, poligono di Newton, varietà tropicali.

Riferimenti bibliografici

A) [CR] C. Ciliberto e F. Russo, Varieties with minimal secant degree and linear systems of maximal dimension on surfaces, Adv. Math., 200 (2006) 1–50.

[CR1] C. Ciliberto e F. Russo, On the classification of OADP varieties, Science China Mathematics, 54, (2010), n. 8 1561–1575.

[R] F. Russo, On a theorem of Severi, Math. Ann., 316 (2000) 1–17.

[S] F. Severi, Intorno ai punti doppi impropri di una superficie generale dello spazio a quattro dimensioni e a' suoi punti tripli apparenti, Rend. Circ. Mat. Palermo, 15 (1901) 33–51.

B e C) [AG] M. A. Akivis e V. V. Goldberg, Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathmàtiques de la SMC, 18. Springer-Verlag, New York, 2004.

[GH] P. Griffiths e J. Harris, Algebraic geometry and local differential geometry, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 12 (1979), 3, 355–452.

[L1] J.M. Landsberg, On second fundamental forms of projective varieties, Invent. Math. 117 (1994), 2, 303–315.

[L2] J.M. Landsberg, Differential-geometric characterizations of complete intersections, J. Differential Geom., 44 (1996), 1, 32–73.

[I1] G. Ilardi, Rational varieties satisfying one or more Laplace equations, Ricerche di Matematica, 48 (1999) , n.1, 123–138, 1999.

[I2] G. Ilardi, Togliatti systems, Osaka J. Math., 43 (1),(2006) 1–12 .

[MC1] J. Mcdonald, Fiber polytopes and fractional power series, J. Pure Appl. Algebra, 104 (2) ,(1995):213–233.

[MC2] J. Mcdonald, Fractional power series solutions for systems of equations, Discrete Comput. Geom., 27(4) (2002):501–529.

[MMO] E. Mezzetti, R. M. Miró-Roig e G. Ottaviani, Laplace Equations and the Weak Lefschetz Property, Canadian Journal of Mathematics 65 (3), (2013), 634–654.

[N] I. Newton, The mathematical papers of Isaac Newton, vol. III:1670-1673, edited by D. T. Whiteside, with the assistance in publication of M. A. Hoskin and A. Prag. Cambridge University Press, London, 1969.

[P] D. Perkinson, Inflections of toric varieties, Mich. Math., J, 48, (2000), 483–516.

[T1] A. Terracini, Sulle V_k che rappresentano piú di $1/2k(k-1)$ equazioni di Laplace linearmente indipendenti, Rend. Circ. Mat. Palermo, 33 (1912), 176–186.

[T2] A. Terracini, Alcune questioni sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà. I, Atti R. Accad. Sc. Torino, 49 (1914), 214–247.

[T] E. Togliatti, Alcune osservazioni sulle superficie razionali che rappresentano equazioni di Laplace. Ann. Mat. Pura e Appl. 25(4), (1946) 325–339.