PROGETTO DI RICERCA DIPARTIMENTALE

Tecniche geometriche e funzionali per lo studio di problemi variazionali e di equazioni alle derivate parziali

Durata: 1/1/2015 - 31/12/2016

Responsabile: Nicola Fusco

Partecipanti: M. Barchiesi, N. Fusco, C. Leone, C. Mantegazza, G. Moscariello, A. Verde

Obiettivi

Scopo di questo progetto è lo studio di alcuni problemi di calcolo delle variazioni e di equazioni alle derivate parziali da effettuarsi con l'utilizzo di tecniche geometriche e funzionali e con particolare riguardo alle seguenti tematiche:
1) Stabilità di disuguaglianze geometriche e funzionali.
2) Problemi a discontinuità libera: regolarità ed evoluzione.
3) Regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche, paraboliche e di evoluzione geometrica.

Prerequisiti

Lo studio di problemi variazionali a discontinuità libera e dell'esistenza e regolarità di soluzioni di equazioni alle derivate parziali ha ricevuto nuovo impulso grazie ad alcuni recenti risultati di stabilità per varie disuguaglianze geometriche e funzionali. Su tali problematiche alcuni afferenti al progetto hanno ottenuto recentemente dei risultati generali di un certo rilievo e successivamente ne hanno cominciato con successo la loro applicazione ai problemi suddetti. Altri afferenti al progetto hanno invece ottenuto risultati di un certo interesse su problematiche di regolarità per soluzioni di equazioni alle derivate parziali, in particolare quelle legate all'evoluzione geometrica di varietà riemanniane.

Descrizione

1) Stabilità di disuguaglianze geometriche e funzionali

Quando qualche anno fa è cominciato lo studio di queste tematiche non c'erano a disposizione delle tecniche consolidate. Ma rapidamente si sono sviluppate tecniche di caria natura: simmetrizzazione di insiemi e funzioni, trasporto di massa, regolarità di superfici minime e tecniche di rigidità. Le tecniche di simmetrizzazione sono state utilizzate da Fusco, Maggi e Pratelli nella prima dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa e poi per la stabilità della disuguaglianza di Sobolev e della disuguaglianza isoperimetrica gaussiana. Il trasporto di massa è stato utilizzato da Figalli, Maggi e Pratelli per estendere la disuguaglianza isoperimetrica quantitativa al caso anisotropo, mentre Cicalese e Leonardi hanno utilizzato per la prima volta la teoria della regolarità per gli insiemi di perimetro finito per dare una diversa dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa. Utilizzando questo loro approccio recentemente Brasco, De Philippis e Velichkov hanno dimostrato la versione quantitativa della disuguaglianza di Faber-Krahn con l'esponente ottimale. Sempre con queste tecniche di regolarità Fusco e Julin hanno dimostrato una versione più forte della disuguaglianza isometrica quantitativa con stima tipo H^1 dell'asimmetria. Infine, pochi mesi fa, con un'analoga stima, Barchiesi, Brancolini e Julin hanno risolto una congettura relativa alla costante nella disuguaglianza isoperimetrica gaussiana. Tale congettura è stata risolta introducendo una nuova te interessante tecnica di rigidità.

Utilizzando quest'ultima tecnica, intendiamo provare la disuguaglianza isoperimetrica quantitativa per il perimetro classico con una dipendenza della costante proporzionale alla dimensione n dello spazio ambiente. Tale congettura è suffragata dal fatto che tale dipendenza è già nota per insiemi vicini alla sfera. Sempre con questa tecnica intendiamo determinare una limitazione esplicita, e possibilmente ottimale in tre dimensioni, della soglia sotto la quale la palla è l'unico minimo globale di un funzionale del tipo

$$P(E;\Omega) + \int_E \int_E \frac{dxdy}{|x-y|^\alpha},$$

con $0 < \alpha < n$ fissato, fra tutti i sottoinsiemi di E di volume assegnato.

Inoltre, utilizzando tecniche di regolarità intendiamo migliorare la disuguaglianza di Sobolev quantitativa dimostrata alcuni anni fa da Cianchi, Fusco, Maggi e Pratelli sostituendo la distanza in L^{p^*} di una funzione f dalla varietà M di tutte le funzioni ottimali con la distanza L^p del gradiente di f dai gradienti delle funzioni di M. Questa stima è precisamente quella provata da Bianchi ed Egnell alcuni anni fa nel caso particolare $p = 2$ per il quale si utilizzano argomenti tipicamente hilbertiani che ovviamente non funzionano se $p \neq 2$.

Un'altra questione che sarà oggetto di studio nell'ambito di questo progetto riguarda il cosiddetto principio di Eshelby. Consideriamo in $\mathbb{R}^n$, $n = 2$ o 3, un'inclusione Ω dentro un materiale omogeneo di conduttività 1 soggetto ad un campo elettrico uniforme a. Assumiamo che la conduttività di Ω sia $k \neq 1$. Il campo elettrico perturbato è dato da ∇u, con il potenziale u soluzione del problema di polarizzazione

$$\begin{cases} \mathrm{div}(1 + (k-1)\chi_\Omega)\nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x) - a \cdot x = O(|x|^{1-n}) & \text{per } |x| \to \infty. \end{cases} \tag{0.1}$$

In generale il campo è perturbato dall'inclusione e perde di uniformità. Comunque, quando l'inclusione ha la forma di un'ellisse/ellissoide, allora il campo dentro l'inclusione risulta essere uniforme. Il principio di Eshelby per la conduttività è precisamente l'inverso: se il campo elettrico dentro l'inclusione è uniforme per ogni campo a, allora l'inclusione è un'ellisse o un'ellissoide. Questo principio è stato recentemente provato da Kang and Milton e, indipendentemente, da Liu. Se focalizziamo invece l'attenzione sul campo fuori dall'inclusione, vediamo che la soluzione u di (0.1) ha un'espansione asintotica all'infinito data da

$$u(x) = a \cdot x + \frac{1}{(n-1)\omega_{n-1}} \frac{\langle a, Mx\rangle}{|x|^n} + O(|x|^{-n}) \text{ per } |x| \to \infty.$$

La matrice simmetrica $M = M(\Omega, k)$ è detta tensore di polarizzazione (TP). Pólya e Szegö congetturarono che l'inclusione il cui TP ha traccia minima fosse la palla. Questa disuguaglianza isoperimetrica ottimale per il TP è stata ottenuta da Lipton:

$$|\Omega|\mathrm{Tr}(M^{-1}) \leq \frac{n-1+k}{k-1}. \tag{0.2}$$

Il TP per l'ellisse/ellissoide può essere esplicitamente calcolato e risulta soddisfare l'uquaglianza in (0.2). Dal punto di vista della disuguaglianza isoperimetrica, il seguente miglioramento della congettura di Pólya e Szegö è stato provato da Kang and Milton: se il TP soddisfa l'uguaglianza in (0.2), allora Ω deve essere un ellisse/ellissoide.

In questo progetto vogliamo dare una versione quantitativa di tali risultati mostrando che:
se una soluzione u di (0.1) è "quasi" uniforme per ogni campo a, allora l'inclusione Ω è "quasi" un ellisse/ellissoide;
se l'inversa del TP ha traccia vicina a $(n-1+k)/(k-1)$, allora anche in questo caso l'inclusione Ω è "quasi" un ellisse/ellissoide.

2) Problemi a discontinuità libera: regolarità ed evoluzione

Recentemente Fonseca, Fusco, Leoni e Morini hanno studiato in due diversi lavori l'esistenza, la regolarità e il comportamento asintotico dell'evoluzione del funzionale proposto da Spencer e Meiron per lo studio della crescita epitassiale di film sottili in dimensione 2 e 3. In tale modello l'energia è la somma di un termine di superficie che misura il perimetro (eventualmente anisotropo) della superficie Γ_h del film e di un termine di volume che misura l'energia elastica associata alla deformazione u della regione Ω_h occupata da film

$$\int_{\Omega_h} W(E(u)\,dz + \int_{\Gamma_h} \psi(\nu)d\sigma,$$

dove $E(u)$ è la parte simmetrica di ∇u e ψ è una funzione 1-omogenea della normale a Γ_h. Per studiare tale evoluzione si è aggiunto un termine regolarizzante $\varepsilon|H|^p$, dove $\varepsilon > 0$ e H è la curvatura media di Γ_h. In particolare si è studiata l'evoluzione del flusso gradiente del suddetto funzionale rispetto alla norma H^{-1} utilizzando la tecnica dei movimenti minimizzanti di De Giorgi.

In questo progetto si vorrebbe provare che questa evoluzione esiste, almeno per tempi piccoli, anche in assenza del termine regolarizzante e il comportamento asintotico quando il dato iniziale è sufficientemente vicino alla configurazione piatta.

Si intende studiare un analogo problema di evoluzione anche per un altro funzionale a discontinuità libera, quello di Ohta-Kawasaki per il quale Acerbi, Fusco e Morini hanno recentemente ottenuto un criterio di minimalità locale basato sulla positività della variazione seconda dei punti critici.

3) Regolarità di soluzioni di equazioni ellittiche, paraboliche e di evoluzione geometrica

Riprendendo ricerche recenti di Leone, Misawa e Verde, siamo interessati alla regolarità di soluzioni deboli dei cosiddetti H-sistemi in dimensione $n > 2$

$$\Delta_n u = n^{\frac{n}{2}} H(u) \nabla_1 u \wedge \cdots \wedge \nabla_n u, \tag{0.3}$$

dove $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, e $H : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata.

È ben noto che soluzioni classiche di (0.3), che siano anche conformi, parametrizzano ipersuperfici con curvatura media H. Il problema, di natura geometrica, è dunque collegato al classico problema di Plateau. I risultati di regolarità di soluzioni degli H-sistemi, sotto varie ipotesi aggiuntive su H, rientrano in una vasta teoria della regolarità di sistemi ellittici non lineari aventi un termine noto a crescita critica nel gradiente. In dimensione $n = 2$, se H è una funzione limitata e Lipschitziana, Bethuel ha provato che le soluzioni sono localmente hölderiane. Sempre per $n = 2$, Rivière ha ottenuto, tra l'altro, la continuità delle soluzioni di (0.3) nella sola ipotesi di continuità sulla funzione H. D'altra parte, non sono noti, e andranno investigati in questo progetto, risultati in dimensione $n > 2$.

Un altro filone di ricerca verte su questioni di regolarità di minimi locali di funzionali anisotropi del calcolo delle variazioni del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega'} \frac{(|u_{x_i}| - \delta_i)_+^{p_i}}{p_i} + \int_{\Omega'} fu, \tag{0.4}$$

con $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p_i}_{loc}(\Omega)$, $\Omega' \subset \Omega$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, $\delta_i \geq 0$ e $p_i \geq 2$. Questo funzionale nasce dallo studio di problemi di trasporto ottimo con congestione ed effetti anisotropi. È interessante notare che in questo tipo di funzionali viene a mancare l'ellitticità (anche nel caso $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_n = 0$ e $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, ossia per il cosiddetto pseudo p-Laplaciano). Nonostante la mancanza di ellitticità caratterizzi anche i funzionali aventi una struttura di tipo p-laplaciano all'infinito questo tipo di problema risulta essere più complicato.

A partire da recenti risultati riguardanti il funzionale (0.4) nel caso $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, ottenuti da Bousquet, Brasco e Julin, cercheremo di provare l'esistenza di minimi locali lipschitziani, studiando le relazioni che devono essere soddisfatte dagli esponenti p_i, e il tipo di regolarità da richiedere sul termine noto f.

Infine è nostro intento investigare alcuni 'nuovi' flussi geometrici di metriche Riemanniane sulle varietà come il flusso di Bach, il flusso di Schouten, il flusso per il gruppo di rinormalizzazione e in particolare la seguente famiglia di flussi (detti di Bourguignon) che possono essere visti come una perturbazione del flusso di Ricci (che si ottiene se $\rho = 0$):

$$\partial_t g \;=\; -2(\mathrm{Ric} - \rho \mathrm{R} g)\,.$$

Qui $g = g(t)$ è una famiglia ad un parametro di metriche Riemanniane, Ric e R sono rispettivamente il tensore di Ricci e la curvatura scalare della metrica g al tempo $t \geq 0$, e ρ è un parametro reale. In tutti questi casi siamo interessati alle proprietà fondamentali del flusso come esistenza, unicità, regolarità, mantenimento di proprietà geometriche, comportamento asintotico e analisi della formazione di eventuali singolarità.

Come per il flusso di Ricci, correlato con quest'ultimo punto è lo studio delle soluzioni autosimili del flusso, dette *solitoni*. Queste sono varietà riemanniane (M, g) caratterizzate dall'esistenza di una funzione regolare $f : M \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathrm{Ric} \,-\, \rho \mathrm{R} g \,+\, \nabla^2 f \;=\; \lambda\, g\,,$$

per una costante reale λ. Questi oggetti e la loro classificazione sono stati studiati da Catino e Mazzieri. Così come il flusso di Bourguignon è una perturbazione del flusso di Ricci, essi sono perturbazioni dei solitoni di Ricci ed è possibile tracciare una linea di ricerca di studio di quest'ultimi mediante un'approssimazione per ρ piccolo, a causa del fatto che il loro studio e classificazione è molto più facile se ρ è diverso da zero.

Un'altra linea di analisi dei solitoni di Ricci per via perturbativa è legata al fatto che tali solitoni sono punti critici del seguente funzionale di Perelman sulle coppie metrica–funzione (g, f) su una varietà

$$(g, f) \;\longmapsto\; \mathcal{W}(g, f) \;=\; \int_M [\,\mathrm{R} + |\nabla f|^2 + f - n\,]\, e^{-f} d\mu_g\,, \tag{0.5}$$

sotto il vincolo $\int_M e^{-f} d\mu_g = 1$, e che recentemente Mantegazza e collaboratori hanno provato che la famiglia di funzionali, perturbazioni del suddetto,

$$(g, f) \;\longmapsto\; \mathcal{W}_\varepsilon(g, f) \;=\; \int_M [\,\mathrm{R} + |\nabla f|^2 + f - n\,]\, \exp(-f + 2\varepsilon - 2\varepsilon e^{-f})\, d\mu_g\,, \tag{0.6}$$

sotto il vincolo $\int_M e^{-f} d\mu_g = 1$, ammette punti critici di facile classificazione. Ci aspettiamo dunque che i punti critici (almeno quelli non degeneri) del funzionale originale $\mathcal{W}$ siano approssimati da punti critici dei funzionali perturbati $\mathcal{W}_\varepsilon$ e che in tal caso varie proprietà geometriche o di simmetria passino al limite, permettendoci quindi conclusioni sui solitoni di Ricci.