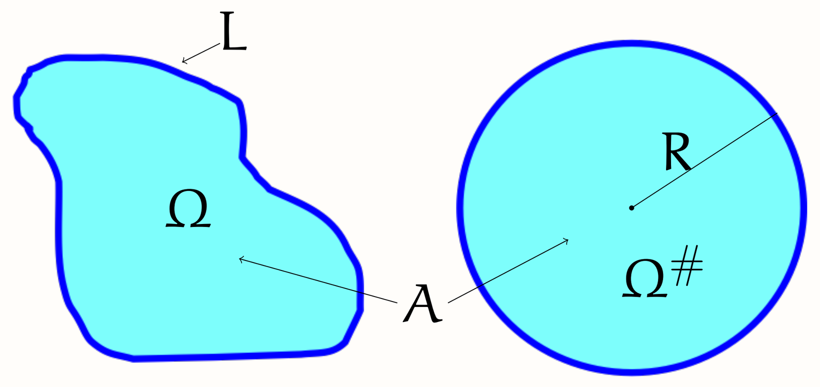
Metodi di simmetrizzazione e applicazioni

A. Alvino, V. Ferone, E. Giarrusso,
A. Mercaldo, C. Trombetti, G. Trombetti
B. Messano, C. Nitsch, M.R. Posteraro, R. Volpicelli
B. Brandolini, F. Chiacchio, F. Della Pietra, N. Gavitone
G. Piscitelli

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università degli Studi di Napoli Federico II

Simmetrizzazione di insiemi

Trasformare un insieme in uno "più simmetrico", che ne conservi qualche proprietà. Ad esempio, a partire da una figura piana Ω, il disco $\Omega^\#$ della stessa area.

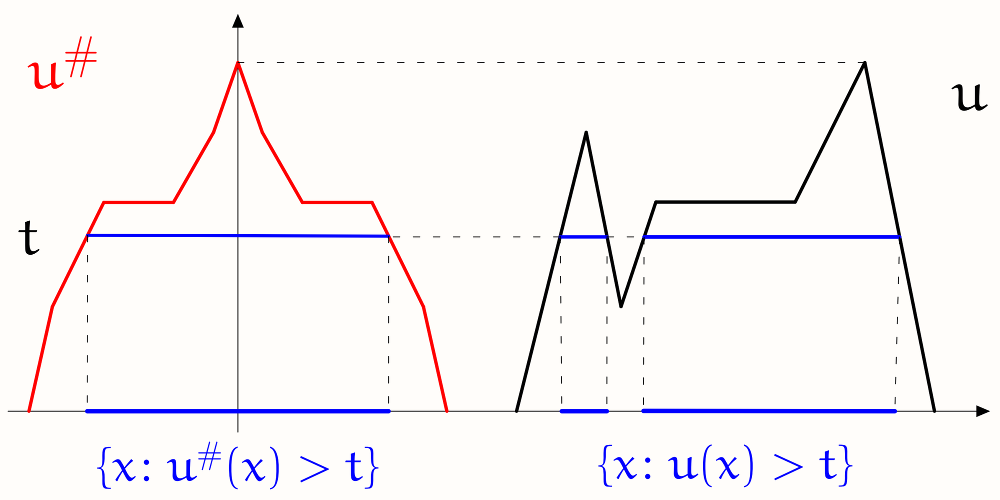


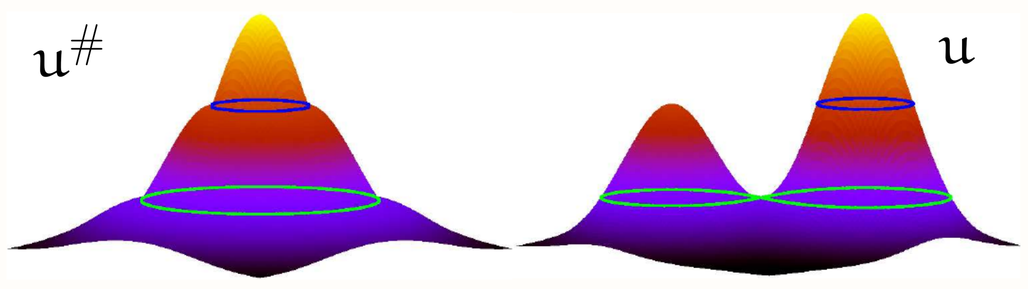
Diseguaglianza isoperimetrica nel piano: Tra tutte le figure piane Ω di fissata area A, il cerchio $\Omega^\#$ ha il perimetro più piccolo:

$$\frac{L^2}{A} \geq \frac{(2\pi R)^2}{\pi R^2} = 4\pi.$$

Simmetrizzazione di funzioni

Trasformare una funzione in una "più simmetrica" che ne conservi qualche proprietà. Ad esempio:





$u^\#$ è il *riordinamento sferico decrescente* di u:
(α) $u^\#$ è a simmetria radiale decrescente;
(β) $|\{u^\# > t\}| = |\{|u| > t\}|$.

Conservazione della norma L^p:

$$(1) \qquad \int_\Omega |u|^p dx = \int_{\Omega^\#} |u^\#|^p dx, \quad \forall p \geq 1.$$

Decrescita dell'energia: se $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^\#|^2 \, dx.$$

Ottimizzazione di forma

Un risultato classico di ottimizzazione di forma è la congettura di Rayleigh (1877), provata da Faber (1923) e Krahn (1925): *Tra tutte le membrane elastiche di fissata area, la membrana circolare ha la frequenza principale più piccola.*
La frequenza principale di Ω è

$$(3) \qquad \lambda(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,2}(\Omega)} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

Se v realizza il minimo in (3), da (1) e (2) si ha

$$\lambda(\Omega) = \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2}{\int_\Omega v^2} \geq \frac{\int_{\Omega^\#} |\nabla v^\#|^2}{\int_{\Omega^\#} (v^\#)^2} \geq \lambda(\Omega^\#)$$

Alcuni contributi recenti sulle forme ottimali

- Stabilità della diseguaglianza isoperimetrica

[1] A. Alvino, V. Ferone, C. Nitsch, J. Eur. Math. Soc. 13 (2011).

- Diseguaglianza isoperimetrica relativa

[2] L.Esposito, V.Ferone, B.Kawohl, C.Nitsch, C.Trombetti, Arch. Ration. Mech. Anal. 206 (2012).

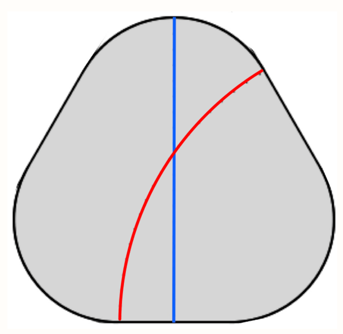
- Energia elastica di una curva

[3] V. Ferone, B. Kawohl, C. Nitsch, preprint (2015).

- In presenza di funzionali anisotropi o con pesi

[4] F. Brock, A. Mercaldo, M.R. Posteraro, Rev. Mat. Iberoam. 29 (2013).
[5] F. Chiacchio, G. di Blasio, Ann. l'Institut H. Poincaré (C) 29, (2012).
[6] F. Della Pietra, N. Gavitone, J. Convex Anal. 20 (2013).
[7] F. Feo, J. Martin, M.R. Posteraro, J. Math. Anal. Appl. 422 (2015).
[8] A. Ferone, R. Volpicelli, Calc. Var. PDEs 21 (2004).

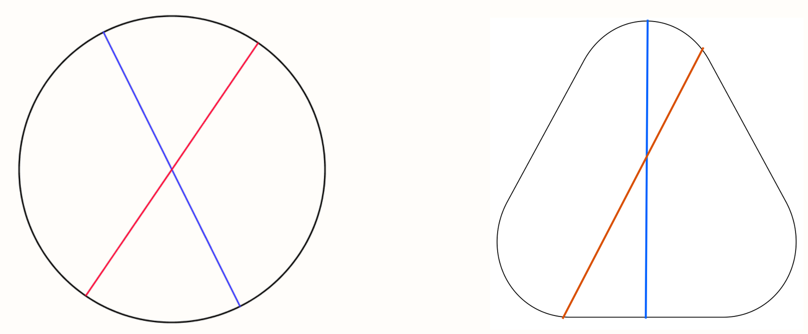
Un risultato recente



Curva area-bisecante e corda area-bisecante

In [2] è provato che tra tutti i domini convessi del piano di data area,

a) il disco massimizza la lunghezza della curva bisecante più corta;
b) il triangolo di Auerbach massimizza la lunghezza della corda bisecante più corta.



Qualche problema aperto

Congettura di Pólya-Szegö: la frequenza principale di una membrana poligonale di N lati di fissata misura è minima per il poligono regolare.

Un altro problema aperto è la congettura per i solidi convessi di larghezza costante che minimizzano il volume.

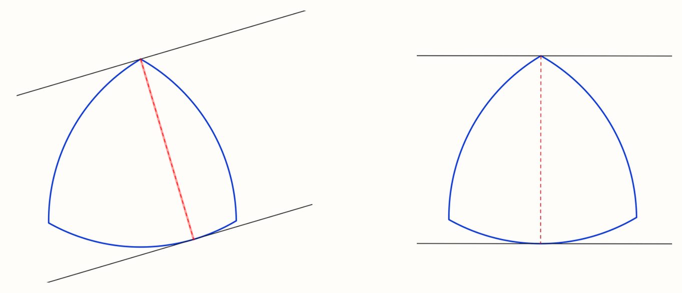
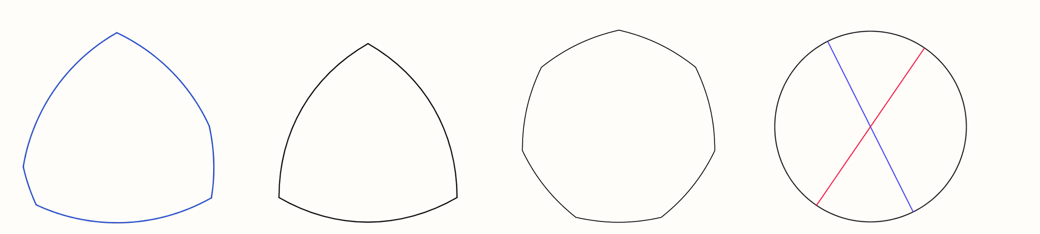
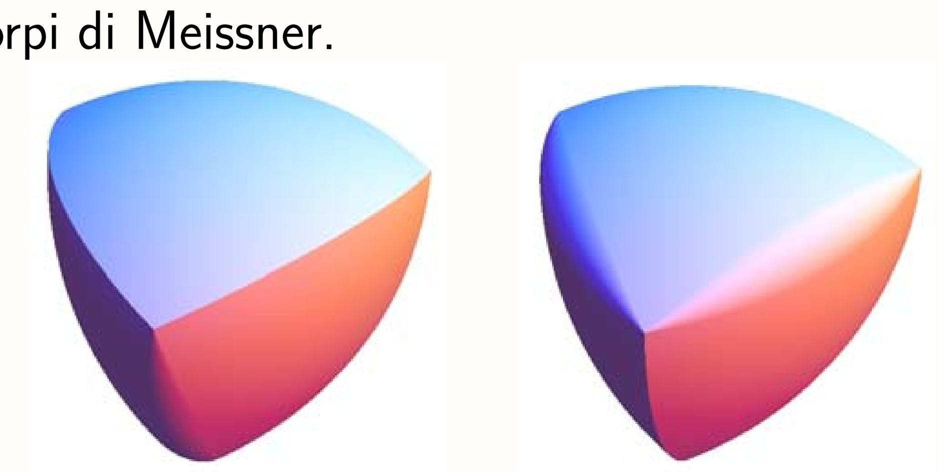


Figure convesse piane di larghezza costante: la distanza tra due rette tangenti parallele qualunque è la stessa



La seconda figura da sinistra, formata da tre archi di circonferenza centrati nei vertici è il triangolo di Reuleaux

Teorema di Blaschke-Lebesgue Tra tutti i domini piani convessi di larghezza costante, il triangolo di Reuleaux ha area minima.
Congettura: Tra tutti i *solidi* convessi di larghezza costante, quelli che minimizzano il volume sono i corpi di Meissner.



Equazioni a derivate parziali

Un risultato classico, dovuto a Talenti (1976), è il seguente: siano u e v due funzioni tali che:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ su } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v = f^\# \text{ in } \Omega^\#, \\ v = 0 \quad \text{ su } \partial\Omega^\#, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, e $\Delta u = \sum_i u_{x_i x_i}$.

Allora si ha: $\quad u^\#(x) \leq v(x) \quad \forall x \in \Omega^\#.$

Dunque, fissato il riordinamento di f e la misura di Ω, v è la "soluzione più grande".

Alcuni contributi recenti

- Estensioni a operatori più generali (ellittici e parabolici) lineari e non lineari
  - A.Alvino, R.Volpicelli, B.Volzone, J.App.Funct.An.3(2008).
  - B. Brandolini, C. Trombetti, J. Eur. Math. Soc. 9 (2007).
- Estensione ad altre condizioni al bordo
  - A. Alberico, A. Cianchi, Ann. Acad. Sci. Fenn. 32 (2008).
  - B. Brandolini, C. Nitsch, P. Salani, C. Trombetti, Arch. Ration. Mech. Anal. 190 (2008).
  - F. Della Pietra, G. di Blasio, preprint (2015).
  - V. Ferone, E. Giarrusso, B. Messano, M.R. Posteraro, Calc. Var., 46 (2013).
- Applicazioni a risultati di esistenza e unicità: dato in L^1 e crescita sopralineare nel gradiente
  - A. Alvino, M.F. Betta, A. Mercaldo, J. Diff. Eq. 249 (2010).
  - A. Alvino, V. Ferone, A. Mercaldo, Ann. Mat. Pura Appl., to appear (2015).

Qualche problema aperto

- Unicità per soluzioni deboli di problemi al bordo con particolari termini di ordine inferiore
- Stime ottimali per alcuni problemi di contorno con crescita sopralineare nel gradiente

Bibliografia

Per un'introduzione ai metodi di simmetrizzazione e alle loro applicazioni, si invita a consultare i lavori:

- V. Ferone, *Diseguaglianze di tipo isoperimetrico e applicazioni*, Boll. UMI (9) 1 (2008), 539-557,
- G. Trombetti, *Metodi di simmetrizzazione nelle equazioni alle derivate parziali*, Boll. UMI (8) 3-B (2000) 601-634

e la bibliografia contenuta.

Giornata di presentazione del dottorato di ricerca, 19 maggio 2015 - **Poster a cura di F. Della Pietra**